Γραμμικη I Ιανουριος 2018
Καθηγητως Μ. Μαλιακας

Θέμα 1 Έστω $a\in\mathbb{R}$, $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times3}$ και $b=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times1}$.

1) (1.5) Για ποιες τιμές του a το γραμμικό σύστημα $AX=b$ είναι ασυμβίβαστο, έχει άπειρες λύσεις ή μοναδική λύση;

2) (1) Για ποιες τιμές του a ο χώρος γραμμών Γ_A του A είναι ισόμορφος με το $\mathbb{R}^2$;

3) (0.5) Αληθεύει ότι το σύνολο των λύσεων του συστήματος $AX=b$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^{3\times1}$;

4) (1) Έστω ότι $a=1$. Δείξτε ότι αν $BA=0$, όπου $B\in\mathbb{R}^{n\times3}$, τότε $rankB\le 2$.

Θετουμε Υπολογιζουμε τη ορισουσα του Α

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{vmatrix} \underset{\Gamma_1\to\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3}{=} \begin{vmatrix} a+2 & a+2 & a+2\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{vmatrix} =$$

$$=(a+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{vmatrix} \underset{\substack{\Gamma_2\to\Gamma_2-\Gamma_1\\ \Gamma_3\to\Gamma_3-\Gamma_1}}{=} (a+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 0 & a-1 & 0\\ 0 & 0 & a-1\end{vmatrix}$$

$=(a+2)(a-1)^2$ και $|A|\neq 0 \Leftrightarrow a\neq -2, a\neq 1$

- Για $a\neq -2,1$ το (Σ) εχει ακριβως 1 λυση
- Για $a=1$ το $(\Sigma)\Leftrightarrow x+y+z=1$ απειρες λυσεις
- Για $a=-2$. Λυνουμε το (Σ) με τον επαυξημενο πινακα

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -2 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -3 & 3 & 3\\ 0 & 3 & -3 & 3\end{array}\right)$$

$\Gamma_2\to\Gamma_1+2\Gamma_2$
$\Gamma_3\to\Gamma_1+2\Gamma_3$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right) \leftarrow \text{αδυνατο}$$

$\Gamma_3 \to \Gamma_3 + \Gamma_2$.

a) Απο την τελευταια επιλυση του επαυξημενου πινακα εχουμε οτι για $a=-2$.

εχουμε $\dim T_A = 2 = \dim \mathbb{R}^2$.

(δυο δ.χ ειναι ισομορφοι ανν εχουν την ιδια διαστασn)

3) Οχι. γιατι αυτο συμβαινει μονο για ομογενη.

4) Για $a=1$ εχουμε

$$\underset{n\times 3}{B} \cdot \underset{3\times 3}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}} = 0$$

Από τo Θεωρημα Sylvester εχομε.

$\operatorname{rank}A + \operatorname{rank}B - n \leq \operatorname{rank}(AB)$. οπου n το μοινο συνεχομενο μεγεθος.

$$1 + \operatorname{rank}B - 3 \leq 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{rank}B \leq 3-1 = 2$$

Θέμα 2 Δίνονται οι υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$

$$U=\{(x,y,z)|x-y-2z=0\}, \quad V=\{(x,y,z)|x+y+z=0\}.$$

1) (1) Για καθένα από τους διανυσματικούς χώρους U, V βρείτε μια βάση και τη διάσταση.

2) (1) Βρείτε υπόχωρο $W \le \mathbb{R}^3$ τέτοιο ώστε $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$.

3) (1) Βρείτε τις διαστάσεις των διανυσματικών χώρων $U \cap V$ και $U+V$.

4) (1) Αληθεύει ότι υπάρχει γραμμική απεικόνιση $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με $\ker f = U$ και $\operatorname{Im} f = V$;

Θ2

η τυχαία τριάδα του U γράφεται

$$(x,y,z)=(y+2z,\ y,z)=y\underbrace{(1,1,0)}_{v_1}+z\underbrace{(2,0,1)}_{v_2}.$$

άρα $U=\langle v_1, v_2\rangle$

και για υποορίζουσα 2x2 του πίνακα των συ/νων είναι $\neq 0$. άρα

$$\dim U = 2$$

ομοίως η τυχαία τριάδα του V γράφεται

$$(x,y,z)=(-y-z,y,z)=y\underbrace{(-1,1,0)}_{v_3}+z\underbrace{(-1,0,1)}_{v_4}.$$

όπως και πριν... v_3, v_4 βάση του V.

άρα $\dim V=2$.

(2) αρκεί να βρούμε ένα v_5 γραμμικά ανεξ. με τα $v_1\ v_2$. Επιλέγουμε το v_5 από την ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ έστω

π.χ. $v_5=(1,0,0)$

$$\begin{vmatrix} \cancel{\ } & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$ άρα γρ. ανεξ.

Έστω $W = \langle (1,0,0) \rangle$.

③ τό $\vec{v}=(x,y,z)$ ανήκει στην τομή $U \cap V$ ανν.

$x - y - 2z = 0$ (1)

$x + y + z = 0$ (2) ας προσθέσουμε κατά μέλη έχουμε $2x - z = 0 \Leftrightarrow \boxed{z = 2x}$.

αντικαθιστώντας στη (1) έχουμε·

$x - y - 4x = 0 \Leftrightarrow -3x - y = 0 \quad y = -3x$.

άρα η τυχαία τριάδα της τομής γράφεται

$(x,y,z) = (x,-3x,2x) = x(1,-3,2) \leftarrow v_6$

άρα $U \cap V = \langle (1,-3,2) \rangle$

Για βάση και διάσταση $U+V$ γράφουμε τις βάσεις των U, V σε πίνακα και τον θέτουμε σε κλιμακωτή μορφή (κάτω).

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim 2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$\Gamma_2 \to 2\Gamma_1 + \Gamma_2$

$\Gamma_3 \to \Gamma_3 + \Gamma_1$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Τελικα βαση του $U+V$ ειναι τα
$(1,1,0)$, $(0,-2,1)$, $(0,0,1)$

Επαληθευση $\dim(U+V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V)$
$\qquad\qquad\qquad\quad 3 \qquad\quad 2 \qquad\quad 2 \qquad\quad 1$

Θέμα 3 Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ που ορίζεται από

$$f(1,0,0) = (1,1,0)$$
$$f(0,1,0) = (1,1,0),$$
$$f(0,0,1) = (0,2,1).$$

1) (1) Υπολογίστε τον πίνακα $A = (f:\hat{e},\hat{e})$, όπου $\hat{e}$ είναι η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^3$, και στη συνέχεια εξετάστε αν οι πίνακες A, B είναι ισοδύναμοι, όπου $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

2) (1.5) Βρείτε βάση του $\ker f$ και βάση της $\operatorname{Im} f$.

3) (1.5) Βρείτε διατεταγμένες βάσεις $\hat{u}, \hat{w}$ του $\mathbb{R}^3$ με $(f:\hat{u},\hat{w}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Θ3

$A = (f,\hat{e},\hat{e}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ γραφαμε τις εικονες στηλες.

Επειτα βρισκουμε $\operatorname{rank} A = 2$ (δυο πρωτες στηλες ιδιες)

Ας βρουμε τη τάξη του B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{ran} B = 1$$

$r_2 \to -2r_1 + r_2$
$r_3 \to -3r_1 + r_3$

αρα οχι ισοδυναμοι

2) Βαση $\ker f$ $\quad A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \ldots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \end{pmatrix} \Rightarrow x + y = 0 \;\big|\; x = -y$

άρα η τυχαία τριάδα του ker f γράφεται.

$$(x,y,z)=(-y,y,0)=y(-1,1,0) \Rightarrow \ker f=\langle(-1,1,0)\rangle$$

Για βάση του Im f γράφουμε τις εικόνες σε κλιμακωτή κάτω μορφή και έχουμε

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&2&1\end{pmatrix} \underset{r_2\to r_2-r_1}{\sim} \begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&2&1\end{pmatrix} \underset{r_2\leftrightarrow r_3}{\sim} \begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&1\\0&0&0\end{pmatrix} \sim$$

άρα $\operatorname{Im} f=\langle \underbrace{(1,1,0),(0,2,1)}_{\text{ανεξάρτητα}}\rangle$.

Επαλήθευση $\dim$ π.ο $-\dim\ker f=\dim \operatorname{Im} f$

$$3-1=2$$

3) Είναι θεώρημα στο βιβλίο σας με ίδια απόδειξη στην άσκηση.

Γ. Μ. Σπηλιώτης